

7. Suma posługuje się wyrazów ciągu arytmetycznego. [kl. 2D] 1-23.03.2020

Proszę zapisać się z przykładem 1 s. 124 oraz z twierdzeniem.

Ćw 2 s 124

b) $a_{20}=?$ $S_{20}=?$ $a_1=\frac{1}{2}, a_2=1, a_3=\frac{3}{2}, a_4=2, \dots$; zauważamy, że $r=a_2-a_1$
stąd $r=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})$

W myśl wzoru $a_n=a_1+(n-1)r$ dla ciągu arytmetycznego mamy

$$a_{20}=a_1+(20-1)r=a_1+19r=\frac{1}{2}+19\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{19}{2}=\frac{20}{2}=\underline{10} \quad a_{20}=10$$

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n \quad \text{zatem} \quad S_{20}=\frac{a_1+a_{20}}{2}\cdot 20=\frac{\frac{1}{2}+10}{2}\cdot 20=\frac{10\frac{1}{2}}{2}\cdot 20=\frac{10\frac{1}{2}}{2}\cdot 20=10\frac{1}{2}\cdot 10=\frac{21}{2}\cdot 10=105.$$

Proszę analogicznie rozwiązać przykład a) Ćw 2 s 124.

Ćw 4 s 125

b) $S_{13}=?$ $a_1=-5, a_2=-8, a_3=-11, \dots$ Zauważamy, że $r=a_2-a_1$
zatem $r=-8-(-5)=-8+5=-3$ oraz $S_{13}=\frac{a_1+a_{13}}{2}\cdot 13$. Należy więc
wyznaczyć jeszcze a_{13} . Zatem $a_{13}=a_1+(13-1)r=a_1+12r$ stąd
 $a_{13}=-5+12\cdot(-3)=-5-36=-41$ oraz $S_{13}=\frac{-5+(-41)}{2}\cdot 13=\frac{-46}{2}\cdot 13=-23\cdot 13=\underline{-299}$

proszę analogicznie rozwiązać przykład a) Ćw 4 s 125.

Ćw 7 s 126

b) $\frac{1}{2}+1+1\frac{1}{2}+\dots+99\frac{1}{2}+100=?$ Można przeprowadzić wypisywanie po lewej
stronie w sumie tak, aby uzyskać sumę liczb naturalnych i liczb z półkami:
 $1+2+\dots+100+\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+\dots+99\frac{1}{2}$. Aby wyznaczyć sumę wszystkich liczb
wystarczy obliczyć z osobna sumy:

$$\underbrace{1+2+\dots+100}_{\text{sto liczb}} \quad \text{oraz} \quad \underbrace{\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+\dots+99\frac{1}{2}}_{\text{sto liczb}} \quad \text{oraz} \quad S_{100}=\frac{a_1+a_{100}}{2}\cdot 100=\frac{1+100}{2}\cdot 100=101\cdot 50=5050 \quad \text{oraz}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{a_1} + \underbrace{1\frac{1}{2}}_{a_2} + \dots + \underbrace{99\frac{1}{2}}_{a_n} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = \frac{\frac{1}{2} + 99\frac{1}{2}}{2} \cdot 100 = \frac{100}{2} \cdot 100 = 100 \cdot 50 = 5000$$

$$a_{100}, r = a_2 - a_1 = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

Stąd suma wszystkich liczb wynosi $5050 + 5000 = 10050$.

d) $-18 - 15 - 12 - \dots + 15 + 18 = (-18) + (-15) + (-12) + \dots + (-2) + (-1) + 1 + 2 + \dots + 15 + 18$

c) $-5 - 7 - 9 - \dots - 28 - 31 = (-5) + (-7) + \dots + (-28) + (-31)$; $r = a_2 - a_1 = -7 - (-5) = -2$
 $r = -7 + 5 = -2$

Jeśli nie wiemy, którym wyrazem ciągu jest ostatnia liczba należy przyjąć że jest to wyraz $a_n = -31$ oraz $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ zatem

$$-31 = -5 + (n-1) \cdot (-2)$$

$$-31 = -5 - 2n + 2$$

$$-31 = -3 - 2n$$

$$-31 + 3 = -2n$$

$$-28 = -2n$$

$n = 14$ stąd $a_{14} = -31$ zatem należy obliczyć $S_{14} = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14$

$$S_{14} = \frac{-5 + (-31)}{2} \cdot 14 = \frac{-36}{2} \cdot 14 = -18 \cdot 14 = -252$$

Proszę audytorów wykonać przykład a) z Ćw 8/126.

Ćw 8/126

a) liczby naturalne mniejsze od 100 to: $0, 1, \dots, 99$. Wśród nich są liczby których reszta z dzielenia ^{przez 5} wynosi 3. Wpiszcie takie liczby w postaci $5m+3$, $n \in \mathbb{N}$ przy czym liczba ~~3~~ $3 = a_1, 13 = a_2, \dots$

Chcemy sprawdzić ile jest takich liczb więc należy rozwiązać nierówność

$$5m+3 < 100 \Leftrightarrow 5m < 97 | :5 \quad m < 19\frac{2}{5} \quad \text{stąd } m \in \{0, 1, 2, \dots, 19\}$$

Tych liczb jest 20, zatem należy policzyć sumę 20 takich liczb, przy czym $a_{20} = 5 \cdot 19 + 3 = 98$, zatem $S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{3 + 98}{2} \cdot 20 = 1000$.

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{3 + 98}{2} \cdot 20 = 1000$$

Proszę rozwiązać przykład a) i b) zadania 1s126 worys -4-
 się nie przykład c):

1s126c) $a_2=12, a_4=0$ $a_2=a_1+r$ i $a_4=a_1+3r$ zatem
$$\begin{cases} 12=a_1+r \\ 0=a_1+3r \end{cases}$$

 $a_1+3r=0 \Leftrightarrow a_1+3(-6)=0 \Leftrightarrow a_1-18=0 \Leftrightarrow \underline{a_1=18}$

$$\underline{r=-6}$$

moż $a_{10}=a_1+9r=18+9(-6)=18-54=\underline{-36}$

$$S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2} \cdot 10=\frac{18+(-36)}{2} \cdot 10=-18 \cdot 5=\underline{-90}$$

Zad. 2s126 Proszę rozwiązać zadanie 2 a), b), c) korzystając z poprzednich:

a) jeśli $100 \leq m < 200$ to są to liczby $\underset{a_1}{100}, \underset{a_2}{101}, \underset{a_3}{102}, \dots, 199$ oraz $a_2-a_1=r$

Skorzystamy również, że są to wszystkie liczby naturalne składowe nie większe niż 199
 ale bez pojedynczych liczb $1, 2, \dots, 99$. Zatem można pokazać, że jest ich
 $199-99=100$. Czyli $a_1=100, r=a_2-a_1$ i $a_{100}=199$.

b) Wszystkie liczby parzyste większe niż 13 i mniejsze niż 2013 można zapisać
 w postaci warunku $13 < 2m < 2013 \mid 2$
 $6\frac{1}{2} < m < 1006,5$ zatem $n \in \{7, 8, \dots, 1006\}$

W zbiorze tym nie ujęto 6-ciu pojedynczych liczb: $1, 2, \dots, 6$ zatem jest
 ich $1006-6=1000$ o wybrane pierwszym $a_1=2 \cdot 7$ i ostatnim $a_{1000}=2 \cdot 1006$
 $a_2=2 \cdot 8, r=a_2-a_1$

Należy więc obliczyć S_{1000} .

c) Wszystkie liczby dwucyfrowe nieparzyste rozpoczynają się od liczby 11,
 a kończą na liczbie 99. Są to więc liczby $\underset{a_1}{11}, \underset{a_2}{13}, \underset{a_3}{15}, \dots, \underset{a_m}{99}$, oraz $r=2$
 wiadomo, że $a_m=99$ i $a_m=a_1+(m-1)r$
 zatem $99=11+(m-1) \cdot 2$, skąd wynika, że $m=45$ czyli $99=a_{45}$.

Należy już tylko policzyć S_{45} .

- a) Wyszukaj liczby naturalne, których reszta z dzielenia wynosi 1
można zapisać w postaci $5m+1$ i mają one spełniać warunek
 $5m+1 < 100$.

Proszę dokonać monotonizacji zadania wznosząc się do ćwicze-
nia 8 s. 126 a).

- b) Proszę wykonać zadanie wznosząc się do ćwiczenia 8 s. 126 a)
przy czym zauważyć, że liczby o których mowa w zadaniu są
postaci $4n+3$ i spełniając one warunek $10 < 4n+3 < 80$.

$$\begin{array}{lcl} \text{Stąd wynika, że} & 10 < 4n+3 & ; \quad 4n+3 < 80 \text{ czyli} \\ & 10-3 < 4n & ; \quad 4n < 80-3 \\ & 7 < 4n & ; \quad 4n < 77 \\ & 1\frac{3}{4} < n & ; \quad n < 19\frac{1}{4} \end{array}$$

zatem $n \in \{2, 3, \dots, 19\}$. Jest ich więc $19-1=18$ oraz $a_1 = 4 \cdot 2 + 3$,
 $a_2 = 4 \cdot 3 + 3, \dots, a_{18} = 4 \cdot 19 + 3$. Należy więc obliczyć S_{18} .

Zad. 4 s. 126

- b) Aby obliczyć sumę wszystkich liczb trzyzbowych niepodzielnych
przez 3 należy najpierw policzyć sumę wszystkich liczb trzyzbowych
oraz sumę wszystkich trzyzbowych liczb podzielnych przez 3.
Na koniec od sumy wszystkich liczb trzyzbowych należy odjąć
sumę wszystkich trzyzbowych liczb podzielnych przez 3 otrzymując
sumę tylko tych trzyzbowych niepodzielnych przez 3.

A zatem wszystkie liczby trzyzbowe to: $100, 101, 102, \dots, 999$.

Liczba jest $999 - 99 = 900$ (odrzucając liczby od 1 do 99 od wszystkich 999
połączonych liczb). Stąd $a_1 = 100$, $a_2 = 101$, $r = a_2 - a_1 = 1$ oraz $a_{900} = 999$.

$$\text{Zatem } S_{900} = \frac{a_1 + a_{900}}{2} \cdot 900 = 494550$$

Policzmy teraz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych podzielnych przez 3. Skoro to liczby postaci $100 \leq 3m \leq 999 \mid :3$

zatem $m \in \{34, 35, \dots, 333\}$, czyli jest ich $333 - 33$ (bo odrzucamy 33-początkowych liczb). Jest ich zatem 300. Obliczamy więc $a_{300} = 3 \cdot 333 = 999$, $a_1 = 102$
 oraz $S_{300} = \frac{a_1 + a_{300}}{2} \cdot 300 = \frac{102 + 999}{2} \cdot 300 = 165150$.

Na koniec odejmujemy od S_{900} sumę S_{300} , stąd $S_{900} - S_{300} = 329400$

Proszę analogicznie przeprowadzić rozumowanie i obliczyć sumę wszystkich liczb niepodzielnych przez 3, które są dwucyfrowe (tj. 49/26)

Zad 5/124

b) Aby obliczyć sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych niż 1001, które są podzielne przez 4 lub przez 9 należy najpierw osobno obliczyć sumy liczb mniejszych niż 1001 podzielnych przez 4 oraz sumy liczb mniejszych ~~przez~~ od 1001 podzielnych przez 9, a następnie je do siebie dodać. Między liczbami podzielnymi przez 4 znajduje się kilka podzielnych również przez 9 oraz wśród liczb podzielnych przez 9 znajduje się te także podzielne przez 4. Po zsumowaniu liczb te się zdubluje. Należy więc obliczyć sumę wszystkich liczb mniejszych niż 1001 i podzielnych jednocześnie przez 4 i przez 9 (czyli

przez $4 \cdot 9 = 36$) oraz odjąć tę sumę od wcześniej wyznaczonej sumy. Zatem 1) obliczmy sumę liczb mniejszych niż 1001 i podzielnych przez 4.

Spełniające one warunki:

$$0 \leq 4k < 1001 \mid :4$$

$$0 \leq k < 250 \frac{1}{4}$$

stąd $k \in \{0, 1, \dots, 250\}$. Jest więc ich 251 oraz $a_1 = 4 \cdot 0 = 0$, $a_2 = 4 \cdot 1 = 4$, $a_3 = 4 \cdot 2 = 8$

$\dots$, $a_{251} = 4 \cdot 250 = 1000$, stąd $S_{251} = \frac{a_1 + a_{251}}{2} \cdot 251 = 125500$.

2) Obliczmy tenor sumy liczb mniejszych niż 1001 podzielnych przez 9. Spróbujmy one wymeneli: $0 \leq 9k < 1001 : 9$
 $0 \leq k < 111 \frac{2}{9}$

zatem $k \in \{0, 1, \dots, 111\}$. Jest ich zatem 112 oraz $a_1 = 9 \cdot 0 = 0, a_2 = 9 \cdot 1 = 9$
 $\dots, a_{112} = 9 \cdot 111 = 999$. Zatem $S_{112} = \frac{a_1 + a_{112}}{2} \cdot 112 = 55944$.

3) Obliczmy sumę liczb mniejszych niż 1001 podzielnych przez 4 i 9 jednocześnie, czyli podzielnych przez 36 (bo $4 \cdot 9 = 36$). Stąd spróbujmy one wymeneli: $0 \leq 36k < 1001 : 36$
 $0 \leq k < 27 \frac{29}{36}$

zatem $k \in \{0, 1, \dots, 27\}$. Jest ich więc 28 oraz $a_1 = 36 \cdot 0 = 0, a_2 = 36 \cdot 1 = 36$,
 $a_{28} = 36 \cdot 27 = 972$ oraz $S_{28} = \frac{a_1 + a_{28}}{2} \cdot 28 = 13608$.

Stąd suma liczb mniejszych niż 1001 podzielnych przez 4 lub przez 9 wynosi
 $S_{251} + S_{112} - S_{28} = 167836$.

Proszę audytorów wykonać przykład a) zad 5 s 127.

Zad 6 s 127

b) $a_1 = -24, a_2 = -22, a_3 = -20, \dots$ $S_m = 546$ dla $m = ?$

Zauważmy, że $a_m = a_1 + (m-1)r$ oraz $r = a_2 - a_1 = -22 - (-24) = -22 + 24 = 2$

Zatem $a_m = -24 + (m-1) \cdot 2 = -24 + 2m - 2 = 2m - 26$ oraz $S_m = \frac{a_1 + a_m}{2} \cdot m$, stąd

$$S_m = \frac{-24 + 2m - 26}{2} \cdot m, \text{ czyli } S_m = \frac{2m - 50}{2} \cdot m = \frac{2m^2 - 50m}{2} = m^2 - 25m.$$

Chcemy znaleźć, kiedy $S_m = 546$. Należy więc podstawić za S_m liczbę 546 do równania $S_m = m^2 - 25m$ i je rozwiązać. Zatem $546 = m^2 - 25m$
 Należy przenieść wszystkie wyrazy na jedną stronę, bo jest to równanie kwadratowe i obliczyć Δ oraz pierwiastki równania. A zatem

$$m^2 - 25m - 546 = 0 \quad a=1 \quad b=-25 \quad c=-546$$

$$\Delta = (-25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-546) = 625 + 2184 = 2809$$

$$\sqrt{\Delta} = 53$$

$$m_1 = \frac{25-53}{2} = -14 \notin \mathbb{N}_+ \quad \text{nie spełnia warunków zadania, bo liczba wyprós nie może być ujemna}$$

$$m_2 = \frac{25+53}{2} = \underline{\underline{39}} \in \mathbb{N}_+$$

Zatem suma 39-ciu psarykowskich wyprósów upper wynosi 546.

Proszę analogicznie wyliczyć przykład a) zad 6 s 127.

Zad 7 s 127

b) Zauważmy, że po lewej stronie równania mamy 50 wyprósów w sumie, ponieważ każdy wyprós w pierwszej kolejności ma kade naturalny począwszy od 1 na 50 skończony, zatem

$$a_1 = 1+x, \quad a_2 = 2+3x, \quad a_3 = 3+5x, \quad \dots, \quad a_{50} = 50+99x$$

zatem lewą stronę możemy przedstawić w postaci $S_{50} = \frac{a_1 + a_{50}}{2} \cdot 50$

$$S_{50} = 275 \Leftrightarrow \frac{(1+x) + (50+99x)}{2} \cdot 50 = 275 \quad \Leftrightarrow \quad 51+100x = 11$$

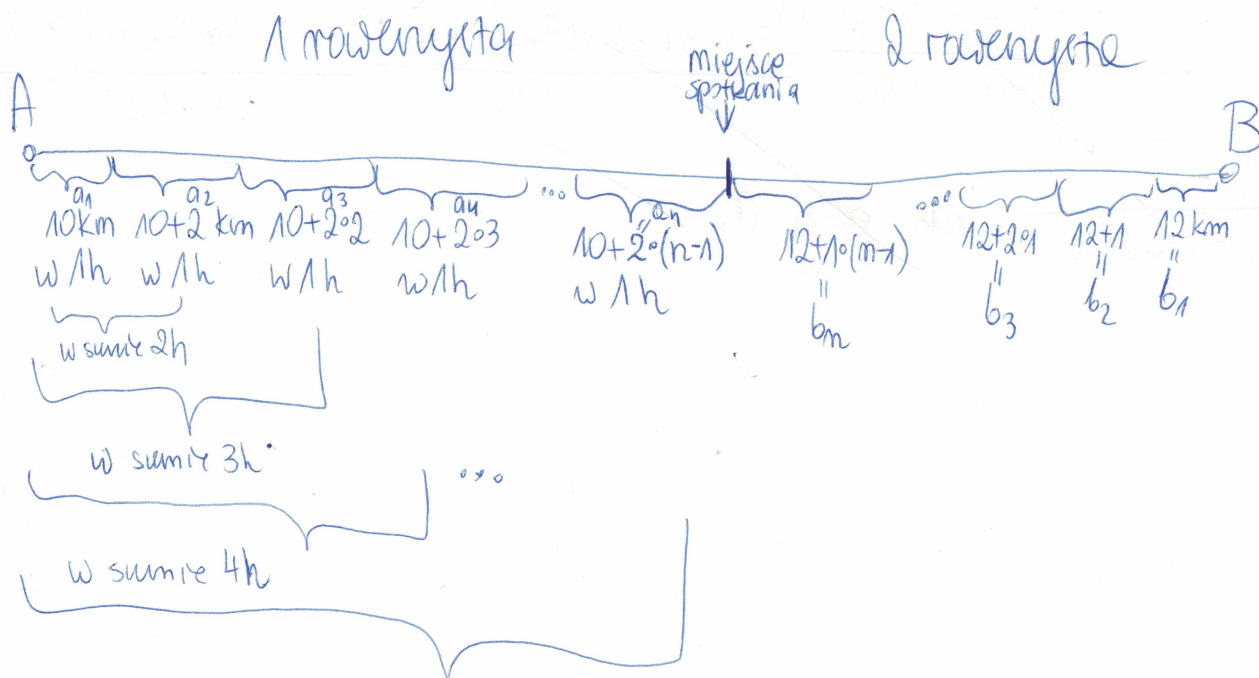
$$51+100x = 11$$

$$100x = 11-51$$

$$100x = -40 \quad | :100$$

$$\underline{\underline{x = -0,4}}$$

Proszę analogicznie rozwiązać równanie w przykład d) zad 7 s 127.



droga jaką pokonał pierwszy rowenysta

$$S_{1n} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{10 + 10 + 2(n-1)}{2} \cdot n = \frac{20 + 2n - 2}{2} \cdot n = \frac{(18 + 2n)n}{2} = \frac{18n + 2n^2}{2} = 9n + n^2$$

$$S_{2n} = \frac{b_1 + b_n}{2} \cdot n = \frac{12 + 12 + (n-1)}{2} \cdot n = \frac{24 + n - 1}{2} \cdot n = \frac{(23 + n)n}{2} = \frac{23n + n^2}{2}$$

$S_{1n} + S_{2n} = 140 \text{ km}$ zatem

$$\frac{18n + 2n^2}{2} + \frac{23n + n^2}{2} = 140 \cdot 2$$

$$18n + 2n^2 + 23n + n^2 = 280$$

$$3n^2 + 41n - 280 = 0$$

$$\Delta = 41^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-280) = 1681 + 3360 = 5041$$

$$\sqrt{\Delta} = 71 \quad m_1 = \frac{-41 - 71}{2 \cdot 3} < 0 \text{ nie spełnia warunku}$$

bo zadani'a, bo czas nie może być ujemny

$$m_2 = \frac{-41 + 71}{6} = 5 \in \mathbb{N}_+$$

Rowenysci spotkają się po 5-u godzinach jazdy.

Zad. 9 s 127

b) $a_m = \frac{3 + 6 + \dots + 3m}{m+5} = \frac{3(1+2+3+\dots+m)}{m+5}$ Zauważmy, że $1+2+\dots+n$ jest sumą

ciągłych wyrazów w którym $b_1=1, b_2=2, r=b_2-b_1=1$ oraz $b_m=m$ stąd $\frac{1+m}{2} \cdot n = \frac{m(m+1)}{2}$

Zatem $a_m = \frac{3}{m+5} \cdot (1+2+\dots+m) = \frac{3}{m+5} \cdot \frac{m(m+1)}{2} = \frac{3m+3m^2}{2m+10} = \frac{3m(1+m)}{2(m+5)}$

Aby zbadać monotoniczność ciągu należy wyznaczyć a_{n+1} i sprawdzić $-10-$
 $a_{n+1} - a_n$ którego jest znaki. Stąd

$$a_{n+1} = \frac{3 \cdot (n+1)(1+n+1)}{2(n+1+5)} = \frac{3(n+1)(n+2)}{2(n+6)}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)(n+2)}{2(n+6)} - \frac{3n(1+n)}{2(n+5)} = \frac{3(n+1)}{2} \cdot \left[\frac{n+2}{n+6} - \frac{n}{n+5} \right] =$$

$$= \frac{3(n+1)}{2} \cdot \left[\frac{(n+2)(n+5) - n(n+6)}{(n+5)(n+6)} \right] = \frac{3(n+1)}{2} \cdot \left[\frac{n^2 + 7n + 10 - n^2 - 6n}{(n+5)(n+6)} \right] =$$

$$= \frac{3(n+1)}{2} \cdot \frac{(n+10)}{(n+5)(n+6)} \quad \text{Zauważmy, że wyrażenie } \frac{3(n+1)(n+10)}{2(n+5)(n+6)} \text{ po wsta-}$$

wieńiu dla n dowolnej liczby naturalnej, do nam będzie dodatnie
 stąd jeśli $a_{n+1} - a_n > 0$, to ciąg jest rosnący.

Proszę audytorów wykonać pyłtad a) zad. 9/127.

Proszę wykonać zadanie 4/127 wrzucić je na zadanie 4/126.

Dzień dobry!

Proszę zapoznać się z przykładowymi rozwiązaniami zadań oraz wskazówkami zawartymi w tematach. Zgodnie z poleceniami proszę wykonać polecane zadania do zeszytu. Proszę wykonać fotografię rozwiązanych zadań w zeszycie i przesłać w załącznikach na mój adres: aleksandra.kaluzna@poczta.onet.pl. W temacie wiadomości proszę podać klasę oraz imię i nazwisko. Rozwiązania poprzedniego zestawu zadań i zaleconych do wykonania zadań oczekuję do końca tego tygodnia. Rozwiązania umieszczone dziś na stronie proszę przesyłać do końca przyszłego tygodnia. W razie pytań i wątpliwości proszę pisać na mój adres.

Pozdrawiam

Aleksandra Kałużna